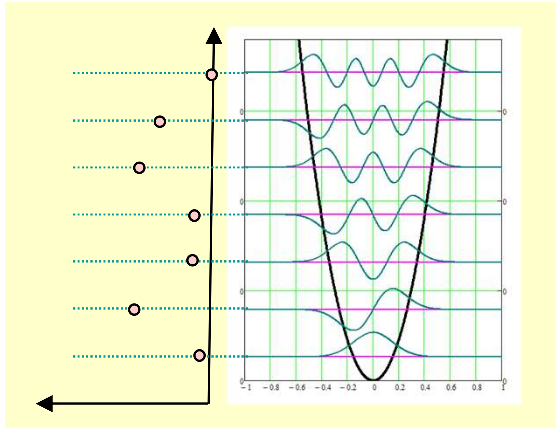
Exercice 8.1: matrices de création et d'annihilation

Les modes propres de l'oscillateur harmonique forment une base orthonormée:

$$\left|\varphi_n\right\rangle \quad n = 0,1,\ldots\infty$$



Un mode superposé de cet oscillateur prend la forme:

$$\left|\psi\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left|\varphi_n\right\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \\ \alpha_{n+1} \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$$\circ = \left|\alpha_n\right|^2 \equiv \left|\left\langle\varphi_n\right|\left|\psi\right\rangle\right|^2$$

Q: Ecrivez sous forme matricielle les opérateurs suivants:

$$a_+ = (?) \qquad a_- = (?) \qquad a_+ \cdot a_- = (?)$$

Exercice 8.1: matrices de création et d'annihilation

$$a_+ |\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1} \cdot |\varphi_{n+1}\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{1}\alpha_0 \\ \sqrt{2}\alpha_1 \\ \sqrt{3}\alpha_2 \\ \sqrt{4}\alpha_3 \\ \cdots \end{bmatrix}$$

$$a_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{n} & 0 \end{pmatrix}$$

PAB

Exercice 8.1: matrices de création et d'annihilation

$$a_+\left|\varphi_n\right\rangle = \sqrt{n+1}\cdot\left|\varphi_{n+1}\right\rangle$$

$$a_-\left|\varphi_n\right\rangle = \sqrt{n}\cdot\left|\varphi_{n-1}\right\rangle$$

$$a_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{n} & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_- = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_+a_-\left|\varphi_n\right\rangle = n\cdot\left|\varphi_n\right\rangle$$

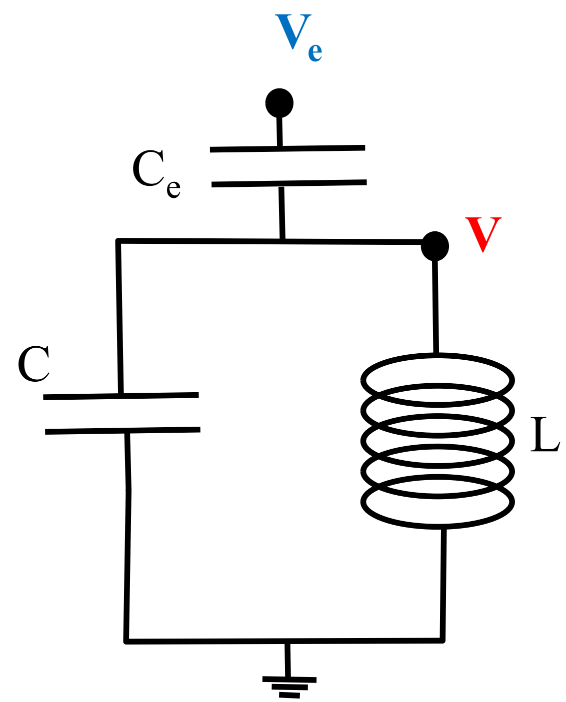
$$a_-a_+\left|\varphi_n\right\rangle = (n+1)\cdot\left|\varphi_n\right\rangle$$

$$a_+\cdot a_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

$$a_-\cdot a_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[a_-, a_+\right] = \mathbb{1}$$

Exercice 8.2: Hamiltonien d'excitation

Oscillateur Harmonique LC



Considérons un résonateur LC harmonique.
Une capacité est utilisée pour l'exciter
par signal AC (V_e) à sa fréquence de résonance.

L'Hamiltonien contient un terme qui mélange
le signal d'excitation et la tension dans le circuit LC

$$H_e = \frac{1}{2} C_e \cdot (V_e - V)^2 \approx -C_e \cdot V_e \cdot V$$

La charge dans le circuit LC est donnée par:

$$\mathbb{Q} = -i \cdot \left(\frac{\hbar^2 \cdot (C + C_e)}{4 \cdot L} \right)^{1/4} \cdot (a_+ - a_-)$$

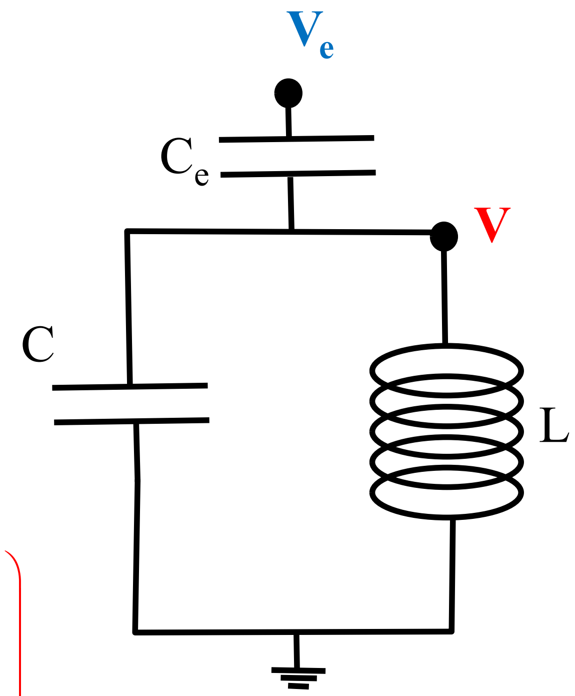
- **Exprimez cet Hamiltonien H_e en fonction des opérateurs de création et d'annihilation**

- **Ecrivez cet Hamiltonien H_e sous forme matricielle**

Exercice 8.2: Hamiltonien d’excitation

<u>Oscillateur Harmonique LC</u>

$$H_e \approx -C_e \cdot V_e \cdot V = -C_e \cdot V_e \cdot \frac{\mathbb{Q}}{(C+C_e)}$$



$$H_e \approx \left(\frac{C_e}{C+C_e} \cdot \left(\frac{\hbar^2 \cdot (C+C_e)}{4 \cdot L} \right)^{1/4} \right) \cdot V_e \cdot i \cdot (a_+ - a_-)$$

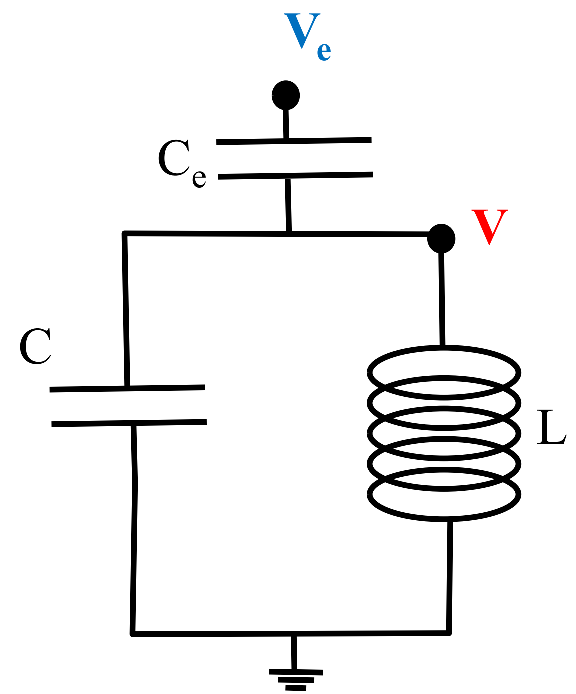
$$H_e \approx \left(\frac{C_e}{C+C_e} \cdot\cdot \left(\frac{\hbar^2 \cdot (C+C_e)}{4 \cdot L} \right)^{1/4} \right) \cdot V_e \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\sqrt{1} & 0 & -i\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -i\sqrt{n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i\sqrt{n} & 0 \end{pmatrix}$$

Hermitien

Exercice 8.2: Hamiltonien d’excitation

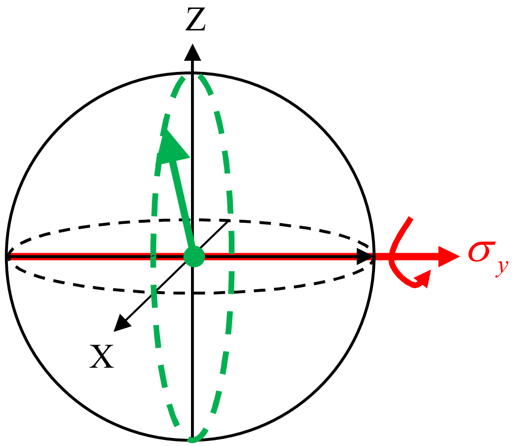
Oscillateur Harmonique LC

$$H_e \approx \left(\frac{C_e}{C+C_e} \cdot \cdot \left(\frac{\hbar^2 \cdot (C+C_e)}{4 \cdot L} \right)^{1/4} \right) \cdot V_e \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\sqrt{1} & 0 & -i\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -i\sqrt{n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i\sqrt{n} & 0 \end{pmatrix}$$



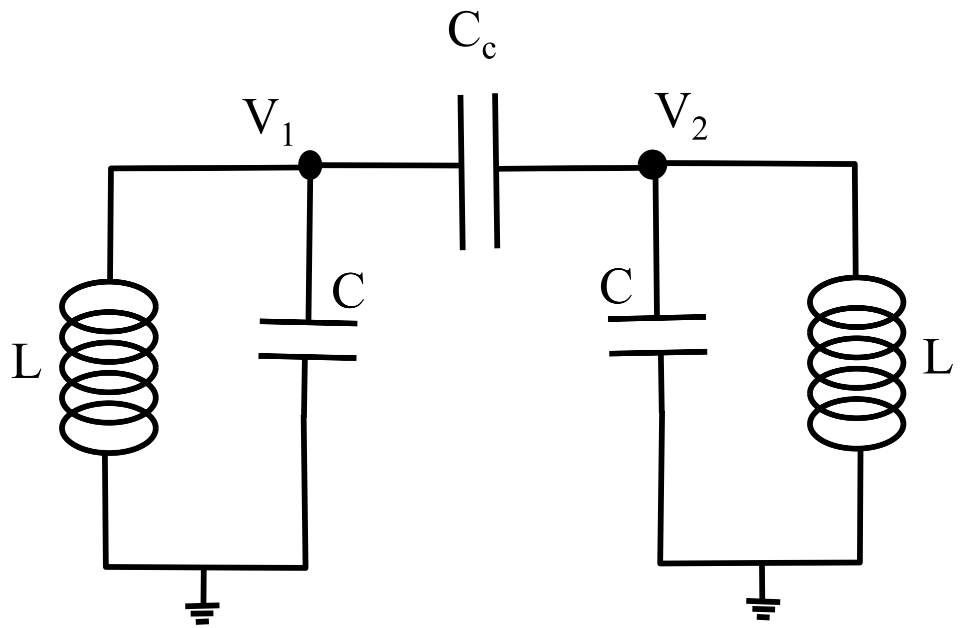
Pour un qubit à deux états:

$$\boxed{H_e = g \cdot V_e \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = g \cdot V_e \cdot \sigma_Y}$$



Exercice 8.3: Hamiltonien de couplage

Considérons deux résonateurs LC identiques.
Une capacité est utilisée pour les coupler.



L'Hamiltonien contient un terme de couplage entre les deux circuits.
Inspirez-vous de l'exercice précédent pour exprimer ce terme

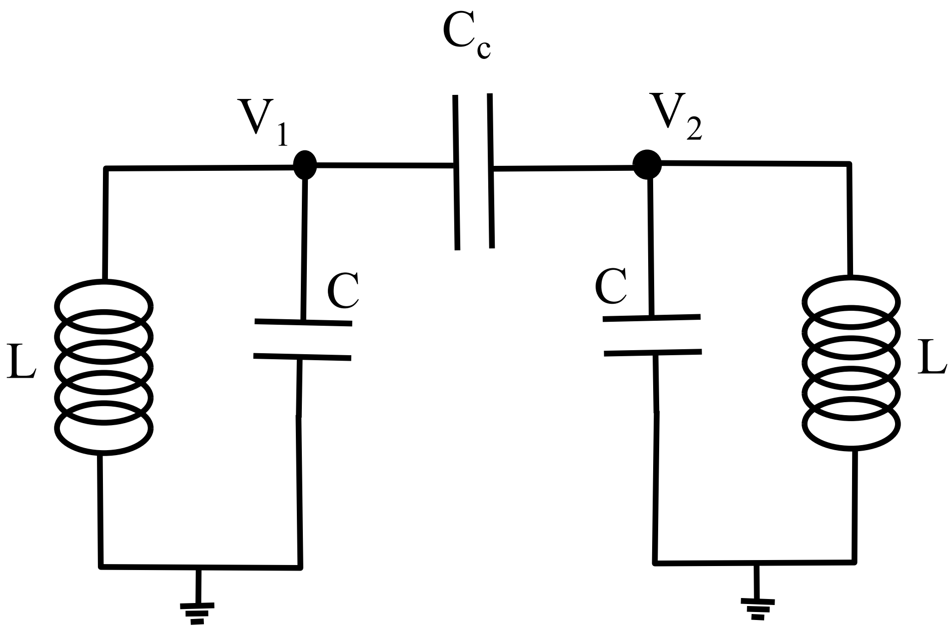
$$H_c = \frac{1}{2} C_c \cdot \left(V_1 - V_2\right)^2 \approx \ldots$$

Utilisez les expressions de la charge dans chaque circuit pour exprimer cet Hamiltonien de couplage en fonction des opérateurs de création et d'annihilation des deux circuits.

ATTENTION: ne vous lancez pas dans une analyse matricielle !!

Exercice 8.3: Hamiltonien de couplage

$$H_c = \frac{1}{2} C_c \cdot (V_1 - V_2)^2 \approx -C_c \cdot V_1 \cdot V_2 \approx -C_c \cdot \frac{Q_1}{C+C_c} \cdot \frac{Q_2}{C+C_c}$$



$$\mathbb{Q}_1 = -i \cdot \left(\frac{\hbar^2 \cdot (C+C_c)}{4 \cdot L} \right)^{1/4} \cdot (a_{1+} - a_{1-})$$

$$\mathbb{Q}_2 = -i \cdot \left(\frac{\hbar^2 \cdot (C+C_c)}{4 \cdot L} \right)^{1/4} \cdot (a_{2+} - a_{2-})$$

$$\boxed{H_c \approx -\frac{C_c}{C+C_c} \cdot \hbar \cdot \sqrt{\frac{1}{L(C+C_c)}} \cdot \left(\frac{a_{1+}a_{2-} + a_{1-}a_{2+}}{2} - \cancel{\frac{a_{1+}a_{2+} + a_{1-}a_{2-}}{2}} \right)}$$

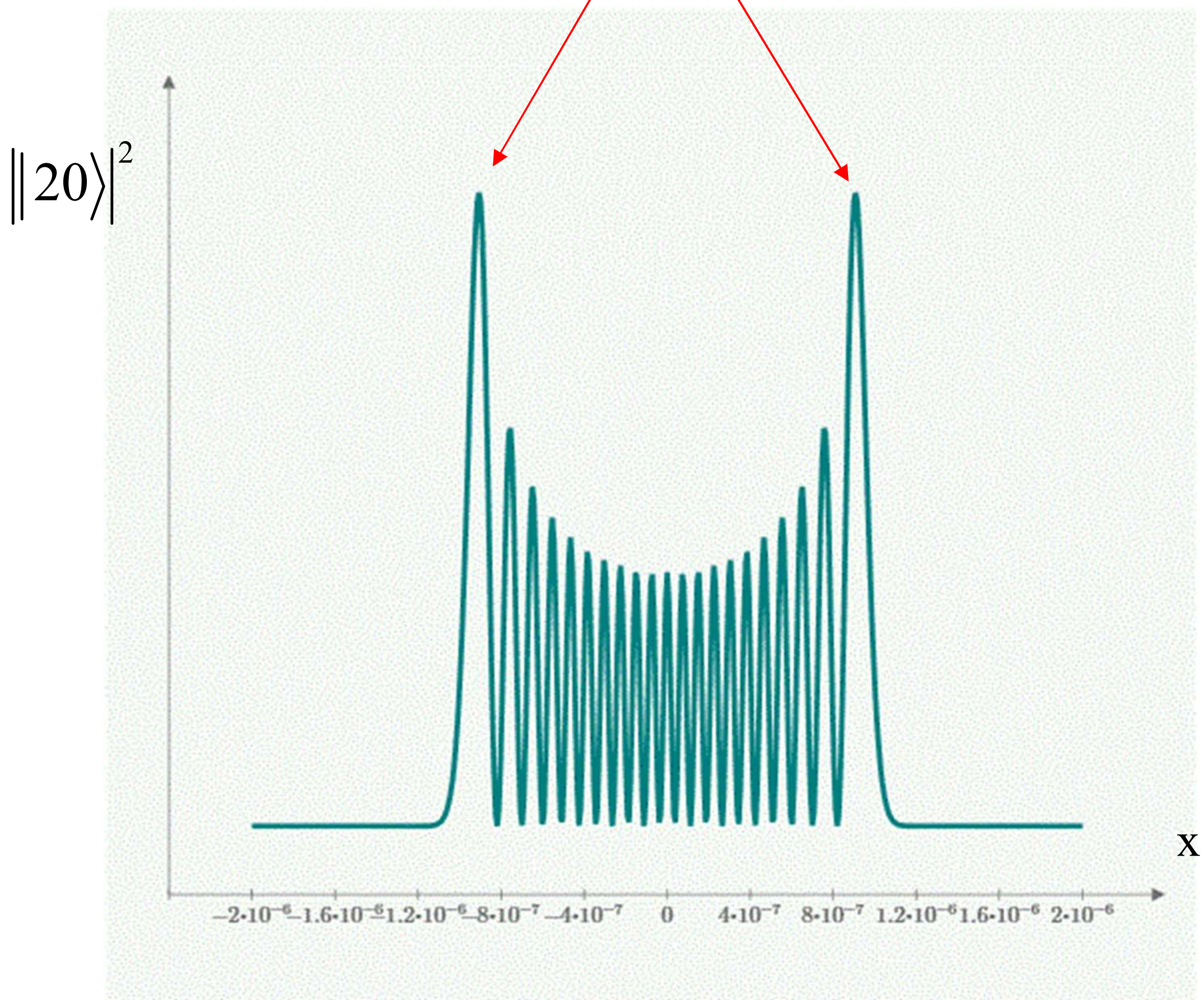
$$\boxed{H_1 = \hbar \cdot \sqrt{\frac{1}{L(C+C_c)}} \cdot \left(\frac{a_{1+}a_{1-} + a_{1-}a_{1+}}{2} \right)}$$

$$\boxed{H_2 = \hbar \cdot \sqrt{\frac{1}{L(C+C_c)}} \cdot \left(\frac{a_{2+}a_{2-} + a_{2-}a_{2+}}{2} \right)}$$

Non-conservateurs

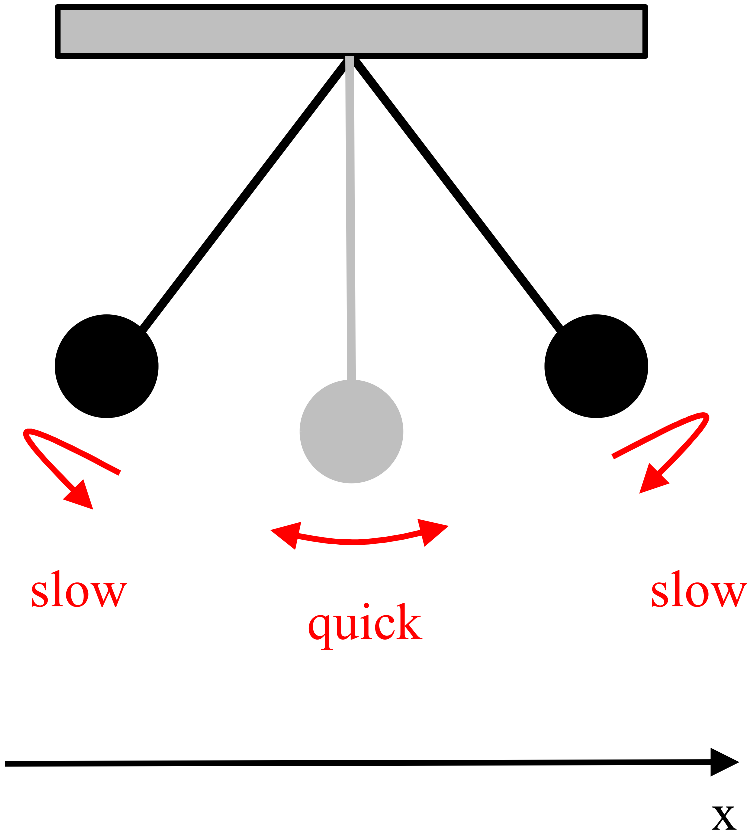
Exercice 8.4

Pourquoi la probabilité de trouver une particule augmente dans les bords ?



Exercice 8.4

Pendule classique



$$\boxed{P_{class}(x) \approx \frac{1}{|v|}}$$